
DST n°5

Mathématiques - 21 Février 2026 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices tous indépendants.

Exercice 1

On considère dans cet exercice les fonctions g et h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = x e^x - e^x + 1$$

1. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x)$.
2. Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
4. Étude de h
 - (a) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$
 - (b) En déduire que pour tout réel x , $h(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$
5. Étude des variations de g .
 - (a) Justifier que g est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
 - (b) Exprimer, pour tout réel x non nul, $g'(x)$ à l'aide de $h(x)$, et en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 1$.

Exercice 2

Soient $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \right\}$ et $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z\}$

1. Montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire.

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et on admet que H est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F . En déduire que $\dim(F) = 2$
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_H$ de H . En déduire que $\dim(H) = 3$.
4. Montrer que $F \cap H$ est une droite vectorielle.
5. On considère le vecteur $u = (1, 0, -1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B}_H \cup \{u\}$ est libre.
6. En déduire que $\mathcal{B}_H \cup \{u\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+4}$.

On pose dans toute la suite de l'exercice, $v_n = (n+4)u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $3u_n = v_{n-1} - v_n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel N non nul, $S_N = \frac{v_0 - v_N}{3}$.

5. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 4

On dispose d'une urne qui contient trois boules, numérotées 0, 1 et 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves se déroulant de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne
- Si i est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à i , le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à i .

On considère alors pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$, la suite d'événements $(E_{i,n})_{n \geq 1}$ définies pour tous entier naturel non nul n par :

$E_{i,n}$: « la boule i est tirée au n -ème tirage »

On définit de plus, pour tout entier naturel non nul n , la matrice colonne U_n par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_{0,n}) \\ P(E_{1,n}) \\ P(E_{2,n}) \end{pmatrix}$$

et on convient de définir U_0 par : $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose enfin $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $P(E_{0,2})$, $P(E_{1,2})$ et $P(E_{2,2})$ (on pourra s'aider d'un arbre).
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $(E_{0,n}, E_{1,n}, E_{2,n})$ est une système complet d'événements, puis à l'aide de la formule des probabilités totales montrer que :

$$U_{n+1} = AU_n$$

On pourra traiter à part le cas $n = 0$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n U_0$.

4. Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

5. Vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

6. Montrer que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

7. En déduire une expression des coefficients de A^n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

8. En déduire $P(E_{0,n})$, $P(E_{1,n})$ et $P(E_{2,n})$ en fonction de n pour tout entier naturel, puis montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{0,n}) = 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{1,n}) = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_{2,n}) = 0$$

9. Justifier alors que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{0,n}\right) = 1$.

Exercice 5

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F .

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G .

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que $A \in F \cap G$

(b) En déduire que A n'est pas inversible

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

-
4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer alors que $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

5. On note $B = I_3 - A$.

Démontrer que la famille (A, B) est une base de F .

6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$.

Vérifier que :

$$M = \alpha A + \beta B$$

- (b) Calculer AB et BA .

- (c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

- (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$$

où M^{-n} désigne l'inverse de la matrice M^n .